

Exercices

Exercice 1 :

Soit deux actifs caractérisés par :

| | Rendement en % | Écart type en % |
|---------|----------------|-----------------|
| Actif 1 | 9 | 4 |
| Actif 2 | 16 | 6 |

Soit x la part de l'actif 1 dans votre portefeuille et $\rho_{1,2}$ le coefficient de corrélation entre l'actif 1 et l'actif 2.

1. Calculez le rendement et le risque des différents portefeuilles possible constitués de ces deux actifs (utilisez x égal à 0 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8 ; 1) dans les quatre cas suivants :

- a) $\rho_{1,2} = 1$
- b) $\rho_{1,2} = -1$
- c) $\rho_{1,2} = 0$
- d) $\rho_{1,2} = -0,5$.

2. Représentez graphiquement ces opportunités de portefeuille dans un plan espérance - écart type.

3. Recherchez la composition du portefeuille de variance minimal dans les trois cas suivants :

- a) $\rho_{1,2} = -1$
- b) $\rho_{1,2} = 0$
- c) $\rho_{1,2} = -0,5$.

Correction :

1.

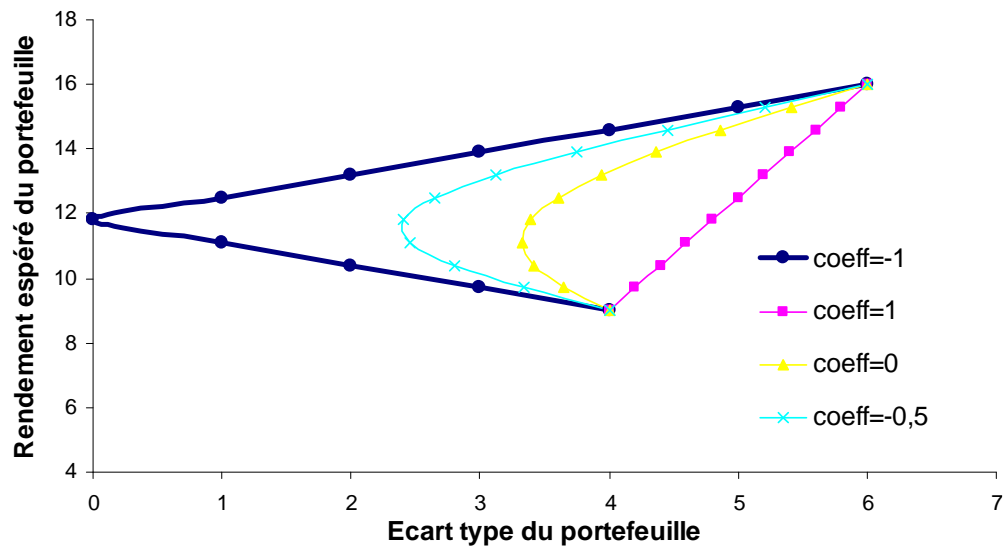
| coeff. corrélation | | 1 | -1 | 0 | -0,5 | |
|--------------------|---------|------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| x | (1 - x) | $E(R_p)$ en % | $\sigma(R_p)$ en % | $\sigma(R_p)$ en % | $\sigma(R_p)$ en % | $\sigma(R_p)$ en % |
| 1 | 0 | 9,00 | 4,00 | 4,00 | 4,00 | 4,00 |
| 0,8 | 0,2 | 10,40 | 4,40 | 2,00 | 3,42 | 2,80 |
| 0,6 | 0,4 | 11,80 | 4,80 | 0,00 | 3,39 | 2,40 |
| 0,4 | 0,6 | 13,20 | 5,20 | 2,00 | 3,94 | 3,12 |
| 0,2 | 0,8 | 14,60 | 5,60 | 4,00 | 4,87 | 4,45 |
| 0 | 1 | 16,00 | 6,00 | 6,00 | 6,00 | 6,00 |

On utilise :

$$E(R_p) = E(xR_1 + (1-x)R_2) = xE(R_1) + (1-x)E(R_2)$$

$$V(R_p) = x^2V(R_1) + (1-x)^2V(R_2) + 2x(1-x)Cov(R_1, R_2)$$

2.



3.

Minimiser la variance du portefeuille revient à annuler sa dérivée par rapport à x .

$$V(R_p) = x^2V(R_1) + (1-x)^2V(R_2) + 2x(1-x)\sigma(R_1)\sigma(R_2)Corr(R_1, R_2)$$

$$\frac{dV(R_p)}{dx} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2xV(R_1) + 2xV(R_2) - 2V(R_2) + 2\sigma(R_1)\sigma(R_2)Corr(R_1, R_2) - 4x\sigma(R_1)\sigma(R_2)Corr(R_1, R_2) = 0$$

$$2xV(R_1) + 2xV(R_2) - 4x\sigma(R_1)\sigma(R_2)Corr(R_1, R_2) = 2V(R_2) - 2\sigma(R_1)\sigma(R_2)Corr(R_1, R_2)$$

$$x = \frac{2V(R_2) - 2\sigma(R_1)\sigma(R_2)Corr(R_1, R_2)}{2xV(R_1) + 2xV(R_2) - 4x\sigma(R_1)\sigma(R_2)Corr(R_1, R_2)}$$

$$x = \frac{V(R_2) - \sigma(R_1)\sigma(R_2)Corr(R_1, R_2)}{V(R_1) + V(R_2) - 2\sigma(R_1)\sigma(R_2)Corr(R_1, R_2)}$$

| coefficient de corrélation | x |
|----------------------------|------|
| -1 | 0,60 |
| 0 | 0,69 |
| -0,5 | 0,63 |

Exercice 2 :

Soit trois actifs caractérisés par :

| Titre | Rendement espéré en % | Ecart type en % |
|-------|--------------------------|--------------------|
| 1 | 15 | 6 |
| 2 | 7 | 2 |
| 3 | 21 | 12 |

et les coefficients de corrélations suivants :

| titre | 1 | 2 | 3 |
|-------|------------|------------|------------|
| 1 | 1 | 0,3 | 0,2 |
| 2 | 0,3 | 1 | 0,4 |
| 3 | 0,2 | 0,4 | 1 |

Le taux sans risque est égal à 4% et les ventes à découvert sont autorisées.

1. Déterminez la composition du portefeuille de marché
2. Calculez l'équation de la frontière efficiente. Que représente cette droite ?
3. Pour obtenir un rendement espéré de votre portefeuille de 8%, comment le composez-vous ?

NB : L'écart type du rendement du portefeuille de marché est de 3,28%.

Correction :

1. Il convient de résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 0,11 = 0,0036Z_1 + 0,00036Z_2 + 0,00144Z_3 \\ 0,03 = 0,00036Z_1 + 0,0004Z_2 + 0,00096Z_3 \\ 0,17 = 0,00144Z_1 + 0,00096Z_2 + 0,0144Z_3 \end{cases}$$

Pour obtenir :

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 = 24,11 \\ Z_2 = 36,61 \\ Z_3 = 6,95 \end{array} \right\} \sum_{i=1}^3 Z_i = 67,68$$

soit :

| | | | | |
|--------|--------|--------|----------|----------|
| X1 | X2 | X3 | $E(R_M)$ | $V(R_M)$ |
| 0,3563 | 0,5410 | 0,1027 | 11,29% | 0,11% |

2. Nous obtenons ainsi l'équation de la frontière efficiente : Elle représente pour chaque niveau de risque, le rendement espéré maximal que l'investisseur peut attendre. Elle représente également pour chaque niveau de rendement espéré, le risque minimal que l'investisseur obtiendra.

$$E(R_p) = R_f + \frac{E(R_M) - R_f}{\sigma(R_M)} \sigma(R_p)$$

$$E(R_p) = 0,04 + 2,221\sigma(R_p)$$

3. Il convient de résoudre :

$$8\% = x \times 4\% + (1-x) \times 11,29\%$$

| | |
|-------------|------|
| E(Rp) cible | 8% |
| Poids Rf | 0,45 |

Ici x représente la part de l'actif sans risque dans le portefeuille total.

Le risque de ce portefeuille est mesuré par :

$$V(R_p) = (1-x)^2 \cdot V(R_M) = (0,55^2) \cdot (0,0011) = 0,03\%$$

et $\sigma(R_p) = 1,8\%$

Exercice 3 : (mêmes données que l'exercice précédent)

Soit trois actifs caractérisés par :

| Titre | Rendement espéré en % | Ecart type en % |
|-------|--------------------------|--------------------|
| 1 | 15 | 6 |
| 2 | 7 | 2 |
| 3 | 21 | 12 |

et les coefficients de corrélations suivants :

| titre | 1 | 2 | 3 |
|-------|------------|------------|------------|
| 1 | 1 | 0,3 | 0,2 |
| 2 | 0,3 | 1 | 0,4 |
| 3 | 0,2 | 0,4 | 1 |

Il n'y a pas d'actif sans risque.

- 1) Donnez la composition des portefeuilles efficients d'espérance de rendement 0 et 1.
- 2) Donnez la structure du portefeuille efficient d'espérance de rendement 11,29%.
- 3) Donnez l'équation de la frontière efficiente
- 4) Un actif sans risque de rendement 4% est introduit, donnez l'équation de la nouvelle frontière efficiente.

Correction :

1)

La matrice des variances-covariances vaut :

$$\begin{pmatrix} 0,0036 & 0,0004 & 0,0014 \\ 0,0004 & 0,0004 & 0,001 \\ 0,0014 & 0,001 & 0,0144 \end{pmatrix}$$

L'inverse de cette matrice vaut :

$$\begin{pmatrix} 307,8276 & -241,8646 & -14,6585 \\ -241,8646 & 3166,2269 & -186,8953 \\ -14,6585 & -186,8953 & 83,37 \end{pmatrix}$$

Les termes constants valent :

$$A = 174,5$$

$$B = 14,62$$

$$C = 2670,6$$

$$D = 8593,5$$

Les proportions du portefeuille efficient d'espérance de rendement nulle sont :

$$X = g = \frac{B\Omega^{-1}\bar{1} - A\Omega^{-1}\bar{R}}{D} = \begin{bmatrix} -0,444 \\ 1,6903 \\ -0,2463 \end{bmatrix}$$

Les proportions du portefeuille efficient d'espérance de rendement égale à un sont :

$$X = g + h = \frac{B\Omega^{-1}\bar{1} - A\Omega^{-1}\bar{R}}{D} + \frac{C\Omega^{-1}\bar{R} - A\Omega^{-1}\bar{1}}{D} = \begin{bmatrix} 6,6455 \\ -8,4909 \\ 2,8454 \end{bmatrix}$$

2) La structure du portefeuille efficient d'espérance de rendement 11,29% est donné par :

$$X = g + 0,1129h = \begin{bmatrix} 0,3564 \\ 0,5408 \\ 0,1028 \end{bmatrix}$$

On retrouve le portefeuille obtenu à l'exercice précédent avec un actif sans risque.

3) Nous devons trouver une équation du second degré du type :

$$V(R_p) = aE(R_p)^2 + bE(R_p) + c$$

Les trois points des trois portefeuilles se situant sur la frontière efficiente vont nous permettre de trouver les trois coefficients a , b et c .

Le risque de chacun des trois portefeuilles précédents se calculent par le produit matriciel suivant : $X^T \Omega X$.

$$V(R_0) = 0,0017013$$

$$V(R_1) = 0,27186$$

$$V(R_{0,1129}) = 0,0010774$$

Ainsi

Le système à résoudre est le suivant:

$$\begin{cases} 0 \times a + 0 \times b + c = 0,0017013 \\ a + b + c = 0,27186 \\ 0,1129^2 \times a + 0,1129 \times b + c = 0,0010774 \end{cases}$$

On en déduit que l'équation de la frontière efficiente s'écrit :

$$V(R_p) = 0,31077E(R_p)^2 - 0,040612E(R_p) + 0,001701$$

4) Nous devons trouver l'équation de la droite d'ordonnée à l'origine R_f tangente à la frontière efficiente sans actif sans risque.

Cette équation est de la forme :

$$E(R_p) = 0,04 + \beta\sigma(R_p)$$

Nous l'incorporons dans l'équation de la frontière efficiente :

$$V(R_p) = 0,31077[0,04 + \beta\sigma(R_p)]^2 - 0,040612[0,04 + \beta\sigma(R_p)] + 0,001701$$

Après simplification :

$$V(R_p) = 0,31077[0,0016 + 0,08\beta\sigma(R_p) + \beta^2\sigma^2(R_p)] - 0,040612[0,04 + \beta\sigma(R_p)] + 0,001701$$

$$(0,31077\beta^2 - 1)\sigma^2(R_p) - 0,0157504\beta\sigma(R_p) + 0,000573752 = 0$$

Le point de tangence est obtenu lorsque la racine de l'équation précédente est double c'est-à-dire lorsque $\Delta = 0$.

$$\Delta = -0,00046514\beta^2 + 0,002295008 = 0$$

$$\beta = 2,221$$

L'équation de la frontière efficiente est identique à celle obtenue dans l'exercice précédent :

$$E(R_p) = 0,04 + 2,221\sigma(R_p)$$

Nous pouvons représenter ces deux frontières efficientes dans un plan espérance-écart type.

